

<b>Title</b>	非圧縮性流体の自由表面状態に関する数値解析的考察
<b>Author(s)</b>	標, 宣男
<b>Citation</b>	聖学院大学論叢, 2: 149-161
<b>URL</b>	<a href="http://serve.seigakuin-univ.ac.jp/reps/modules/xoonips/detail.php?item_id=1121">http://serve.seigakuin-univ.ac.jp/reps/modules/xoonips/detail.php?item_id=1121</a>
<b>Rights</b>	

聖学院学術情報発信システム : SERVE

SEigakuin Repository for academic archiVE

# 非圧縮性流体の自由表面状態に関する数値解析的考察

標 宣 男

A Numerical Study of Free Surface Condition for Incompressible Fluid Flow

Nobuo SHIMEGI

Physical conditions of free surface were numerically studied in terms of a thermodynamic effect on surface tension and a viscous effect by turbulence on the momentum balance, for a non-compressible fluid flow. A pool-swell experiment performed by Laurence Livermor Laboratory was employed and analyzed for this study. The basic physical model used consists of two-dimensional fluid flow equations similar to those of the SOLA computer program where the location of free surface is calculated using the VOF method.

It is concluded from the analyses that the viscous effect of turbulence, as well as the surface tension, plays an important role in free surface calculation and might contribute to stable numerical analyses of free surface fluid flow. On the other hand, the effects of thermodynamics on surface tension calculation is negligible.

## 1. 緒 言—研究の背景と目的—

近年のコンピューター、特に超大型のスーパーコンピューター (super computer)<sup>(1)</sup>の発達は科学技術の世界に大きな変化をもたらした。それは従来の理論科学、実験科学の他に数理科学あるいは計算科学なる分野<sup>(2), (3)</sup>を開きつつあり、純粋科学から応用科学としての技術を含む広範囲な領域をカバーしている。流体力学の分野においては、その基礎方程式である Navier-Stokes 方程式 (以下 NS 方程式という) の持つ強い非線型性故に、解析解を求めることはある限られた条件下を除いて不可能に近く、理論研究の障害となっていた。又技術の分野においても、特殊な流れの特性を把握するためには個々の実験に頼る他なく一般論からの演繹が困難な状況にあった。スーパーコンピ

---

**Key words:** Flow-dynamics, Numerical Analysis, Free Surface, Surface Tension, Turbulent Flow, Viscos Stress, Computer

ューターの出現はこのような多くの困難さを伴う流体力学の研究に対し強力な手段を提供するものであり、特に NS 方程式を様々な境界および初期条件のもとに離散化し、比較的短い計算時間で数値的 (digital) に解くこと (数値解析) により、多くの新しい物理的事実を明らかにして来た。

一般的にいて数値解析法は、元来連続量を取扱う偏微分方程式 (Partial Differential Equation PDE) を離散化し差分方程式 (Difference Equation DE) に変換し解く方法であり、方程式系の変更を意味する。それ故、後者の解が前者の解にはたして一致するかという問題を生ずる。多くの場合、時空間の離散化の中 ( $\Delta t$ ,  $\Delta x$  等) を零に近づけると DE は PDE に近づくという性質、すなわち適合性<sup>(4)</sup>を持つことが数学的に証明されており、離散化の中を適当に小さくとる限り DE は PDE の良い近似を与えるといえる。しかしながら、DE が PDE の良い近似を与えるということは、DE が PDE の性質を持つことを意味し、NS 方程式の持つ強い非線型性が DE にも現われ数値解の安定性に強く影響する。特に乱流解析、燃焼を伴った流れの解析、自由表面を伴った流れの解析には上記の意味での難しい点が多く、それらに対する数値解析手法の開発は現在急務の研究テーマである。

本論文は、このような問題の中の自由表面を伴った非圧縮性流れの数値解析に関するものである。我々の周囲の自然の中にある流れの多くは、いわゆる表面を持ち大気と接している。通常これを自由表面という。この自由表面の力学的状態は流体内部とは異り特別な物理学的条件が存在する。但し流れが緩やかであり表面形状も単純である場合の計算には、特別な自由表面モデルを必要とせず、単に流れに添った表面位置の移動 (すなわち対流) のみを計算すれば良い。このような点から作られた計算モデルとしては、マーカー粒子による方法<sup>(5)</sup>および Lagrangian 座標系を用いる方法<sup>(6)</sup>等が存在する。さらに通常海流の移動等の計算には高さ関数モデルが用いられている<sup>(7)</sup>。しかし、自由表面の形状が複雑でありさらにその時間変化が速い場合には、やはり自由表面の状態を記述する特別な物理的条件の考慮が不可欠であり、これにより物理的にみて正しく且安定な解を得ることが期待される。このような考察から Hirt 等<sup>(8)</sup>は、後述する F-関数により自由表面位置を決定すると共に、自由表面の物理的条件として表面張力を取入れ表面形状を安定に解くことを考えた。この手法により自由表面を伴った流れの解析のいくつかに良好な結果を得た<sup>(8)</sup>。

しかしながら、Hirt の用いた表面張力モデルが常に十分な結果を与えるとは限らず、理論値の数倍から数十倍と非現実的な大きさの表面張力を仮定しなければ安定な解析が出来無いことが指摘されている<sup>(9)</sup>。そこで本論文は Hirt のモデルにおいては考慮されなかった自由表面の物理的条件とその数値的検討により、この非現実的の表面張力の原因を考察し、自由表面に対する妥当な計算条件を提案することを目的としている。本論文で新たに検討した項目は、1) 自由表面の熱力学的影響、2) 流動に伴う粘性ストレスの効果である。特に流動という点からみれば Hirt らのモデルは流れのない静止流体に対する条件を採用したことに相当する。なおこれらを数値的に検討するにあたり自由表面位置の決定は Hirt による F-関数法を用い、且コンピューターによる計算時間をも考え

2次元の座標系を採用した。しかし、これによって結論の一般性が失なわれるものではない。以下の各章では、自由表面の物理モデルおよびその数値的検討と考察および結論を述べる。

## 2. 自由表面を伴った流れの物理モデル

### 2.1 Hirt のモデル<sup>(8)</sup>

Hirt 等は自由表面を伴う流れを解析するため、2次元非圧縮性流体を基礎とした次の物理モデルを提案した。

2次元非圧縮性流体の運動量および連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g_x + \frac{\eta}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + g_y + \frac{\eta}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここで  $u$ ,  $v$  は各々  $x$ ,  $y$  方向の流速,  $\eta$  は粘性係数,  $\rho$  は密度,  $g$  は重力加速度である。Hirt 等のモデルの1つの特徴は自由表面の決定を次の F-関数の対流により行う点にある。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

ここで F 関数は液相の存在する所では1, 気相部では0となり, F の値が1から0へ変化する境界が自由表面となる。この式を離散化して解く場合, F の値が0と1の間を取る領域に自由表面が存在することになる。

Hirt 等のモデルの第2の特徴は, 緒言でも述べた様に自由表面の物理的条件として, 次の表面張力を考慮した点にある。

$$P^\alpha - P^\beta = \frac{2\gamma}{R} \quad (5)$$

ここで  $P^\alpha$  は液相圧力,  $P^\beta$  は気相圧力,  $\gamma$  は表面張力係数,  $R$  は表面の曲率半径であり微分幾何学により次式で与えられる。

$$R = 1 / \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{(\frac{\partial f}{\partial x})}{\sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2}} \right] \right\} \quad (6)$$

$f$ は自由表面形状を示す関数であり、(4)式の  $F$ -関数により与えられる。前記の(1)~(3)式により表わされる流れから見た場合、上記の自由表面の充す物理的条件は境界条件とみなすことが出来る。

なお、(1)~(4)式の差分式およびその解法<sup>(8)</sup>は省略するが、(6)式を  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  で離散化した式のみを以下に示す。

$$R = \Delta x \left\{ \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)_{i+1/2,j}}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)_{i+1/2,j}^2}} - \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)_{i-1/2,j}}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)_{i-1/2,j}^2}} \right\}^{-1} \quad (7)$$

ここで

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{i+1/2,j} = \frac{\sum_{i=1}^3 F_{i+1,j} \Delta x - \sum_{j=1}^3 F_{i,j} \Delta y}{\Delta x} \quad \text{etc.} \quad (8)$$

となる。

## 2. 2 自由表面の熱力学

前節の Hirt の用いた表面張力モデルでは、自由表面を文字通り厚さの無い一つの面として取扱っている。しかし実際には自由表面は厳密の意味の表面ではなく液相から気相へ連続的に変化する有限の厚さを持った層からなっている。自由表面の位置をこの表面厚さの内のどこを取れば良いか、又その取り方により  $\gamma$  の値が変わるかどうか考察の第 1 の対象である。また前記の  $\gamma$  の値が、液滴の大きさの大小により変化するかどうか問題となる。さらに通常  $\gamma$  の値は温度により変化するがこの点も考察の対象となる。以下ではこれらの点を検討する為の物理モデル<sup>(9)</sup>を示す。

### (1) 表面張力係数 $\gamma$ と曲率半径について

まず最初に表面厚さ内の位置と表面張力係数との関係を考える。液相の形状を液滴（球）と考え、液滴表面上の表面厚さ内の点  $R$  を取った場合、前節の(5)式に相当する条件は、

$$P^\alpha - P^\beta = \frac{2\gamma}{R} + \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial R} \right] \quad (8)$$

で与えられる。今  $\left[ \frac{\partial \gamma}{\partial R} \right] = 0$  となる面を選びその半径を  $R_s$ ,  $\gamma$  の値を  $\gamma_s$  とすると任意の位置  $R$  での  $\gamma$  の値は次式で与えられる。

$$\gamma = \gamma_s \left[ \frac{R_s^2}{2R} + \frac{2}{3} \frac{R}{R_s} \right] \quad (9)$$

ここで表面厚さを  $\delta$  とし、 $\epsilon = \delta/R_s$  を用いて(9)式を書直すと、

$$\gamma = \gamma_s (1 + \epsilon^2 + O(\epsilon^3)) \quad (\epsilon \ll 1) \quad (10)$$

となる。

次に、液滴の大きさと表面張力係数の関係を表わす式を示す。 $\delta$  内の表面張力を計算する面の半

径を上記の  $R_s$  とする。又表面が水平 ( $R=\infty$ ) の場合の表面厚さを  $\delta_\infty$ , その場合の表面張力係数を  $\gamma_\infty$  とすると,  $R=R_s$  における  $\gamma$  の値  $\gamma_s$  と  $\gamma_\infty$  の関係は近似的に次の式で与えられる。

$$\gamma_s(R_s) = \gamma_\infty \left(1 - \frac{2\delta_\infty}{R_s}\right) \quad (11)$$

(2) 表面張力係数  $\gamma$  の温度依存性

表面張力係数と温度の関係についてはいくつかの式が提案されている。ここではこの内マイスナーとセファリンによる式を以下に示す。

$$\gamma = (-0.951 + 0.432 \frac{1}{Z_c}) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{11/9} \quad (12)$$

$$Z_c = P_c V_c / R' T_c$$

ここで  $T$  は温度,  $R'$  は定数である。又  $T_c, P_c, V_c$  は各々臨界状態における温度, 圧力, 体積である。

2. 3 自由表面における粘性ストレス

通常静止流体における自由表面の条件は前記のように(5)式で与えられる。又しばしば流体の自由表面における境界条件としてそこでの自由表面へ垂直方向の運動量流束が零であるという条件から

$$\sigma_{ik} n_k = 0 \quad (13)$$

となる<sup>(11)</sup>。ここで  $\sigma_{ik}$  は非圧縮性流体の応力テンソルの  $ik$  成分であり,  $n_k$  は自由表面に対する単位法線ベクトルの  $k$  方向成分である。

しかしながら通常自由表面を持った流れに対する境界条件としては(5)および(13)のそれぞれを独立に用いただけでは十分では無く両方を同時に考慮した次の式を用いなければならない<sup>(12)</sup>。

$$P^\alpha - P^\beta = (\sigma_{\alpha, ik} - \sigma_{\beta, ik}) n_k + \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (14)$$

ただしこの式は3次元流れに対するものであり, 又  $\gamma$  の温度の効果は無視してある。 $n_k$  は法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の  $k$  方向成分であり  $\sigma_{\alpha, ik}, \sigma_{\beta, ik}$  は  $\alpha$  相,  $\beta$  相の粘性ストレスである。 $R_1, R_2$  は各々主曲率半径を示す。

今, 簡単のため2次元の体系を考え,  $w$  方向を自由表面に垂直な方向,  $w$  に直角な方向を  $z$  方向とすると応力テンソル  $\sigma$  および法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は次のようになる。

$$\sigma = \eta \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u_w}{\partial w} & \frac{\partial u_w}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial w} \\ \frac{\partial u_w}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial w} & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{n} = (1, 0) \quad (16)$$

(13)~(16)式より

$$P^\alpha - P^\beta = \gamma \left( \frac{1}{R_1} \right) + \left[ 2 \left( \eta \frac{\partial u_w}{\partial w} \right)_\alpha - 2 \left( \eta \frac{\partial u_w}{\partial w} \right)_\beta \right] \quad (17)$$

今気相部分の流れを考えないとすると(17)式は

$$P^\alpha - P^\beta = \gamma \frac{1}{R_1} + 2 \eta \left( \frac{\partial u_w}{\partial w} \right)_\alpha \quad (18)$$

となる。ここで  $\eta$  は粘性係数である。

2. 1節の(5)式と(18)式とを比較すると(18)式の右辺第二項が新たに付加された量を示し、第1項に対しこの項の符号と大きさが問題となる。さて通常(1)~(3)式を差分方程式により解く場合、離散化の程度によっては、乱流の効果を十分に表わすことはできない。そのような時には別に乱流モデルを用いその効果を乱流粘性係数  $\eta_t$  の形であらわす。この時(1), (2)式の  $\eta$  の値は分子粘性係数  $\eta_0$  と乱流粘性係数  $\eta_t$  との和として表わされる。

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 + \eta_t \\ &= \rho (\nu_0 + \nu_t) \quad (\rho : \text{密度}) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで  $\nu_0$  は分子動粘性係数である。又乱流動粘性係数  $\nu_t$  を求めるための新たな式を必要とするが、ここでは次の  $k$ - $\epsilon$  モデルをその有効性が自由表面付近でも成立つと仮定し用いる。

乱流エネルギー  $k$  に対し

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + u \frac{\partial}{\partial x} (\rho k) + v \frac{\partial}{\partial y} (\rho k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho \left( \nu_0 + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho \left( \nu_0 + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right\} \\ &\quad + \rho \nu_t \left[ 2 \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \rho \epsilon \end{aligned} \quad (20)$$

乱流エネルギーの散逸  $\epsilon$  に対し

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon) + u \frac{\partial}{\partial x} (\rho \epsilon) + v \frac{\partial}{\partial y} (\rho \epsilon) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho \left( \nu_0 + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho \left( \nu_0 + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right\} \\ &\quad + \frac{\epsilon}{k} \left[ c_1 \rho \nu_t \left\{ 2 \cdot \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} - c_2 \rho \epsilon \right] \end{aligned} \quad (21)$$

(20), (21)式を用い乱流動粘性係数は

$$\nu_t = c_\mu k^2 / \epsilon \quad (22)$$

と表わせる。これらの式における  $c_\mu$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\epsilon$  は定数であり次のように与えられる。

$$c_{\mu}=0.09, \quad c_1=1.45, \quad c_2=1.9$$

$$\sigma_k=1.0, \quad \sigma_\epsilon=1.3$$

### 3. 物理モデルの数値的検討

#### 3.1 計算対象

前章で示した物理モデルをコンピューターにより数値的に解きその値を検討するが、その際に採

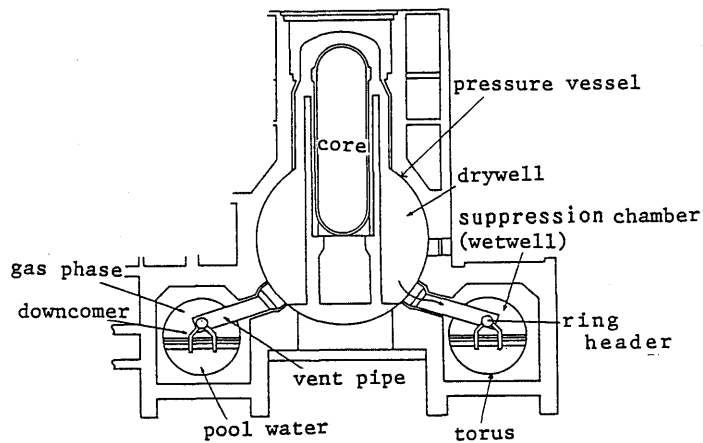


図1 MARK I型沸騰水型原子炉

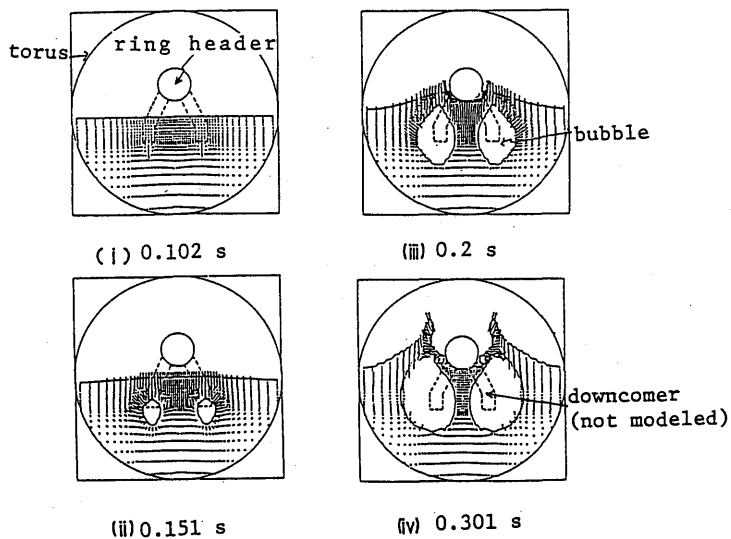


図2 プールスエル現象における自由表面の挙動



用する計算対象について述べる。本論文の目的から、比較的急激な自由表面変形を伴う流れを選択するのが望ましく、それ故ここでは MARK-I 型の沸騰水型原子炉 (BWR) (図 1) における圧力抑制系 (suppression chamber) 中のプールの現象を取上げる。この現象は BWR の事故下に生ずると想定されているものであり、いくつかの実験が実施されている。本論文ではこの内米国のロ

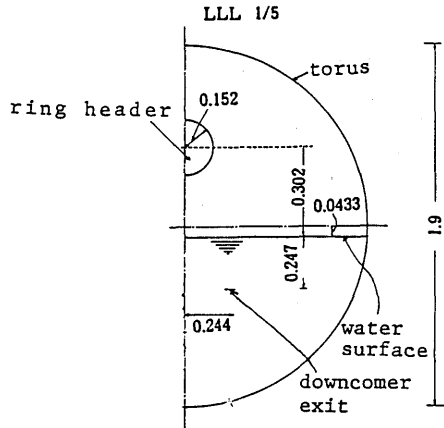


図3 トーラス形状

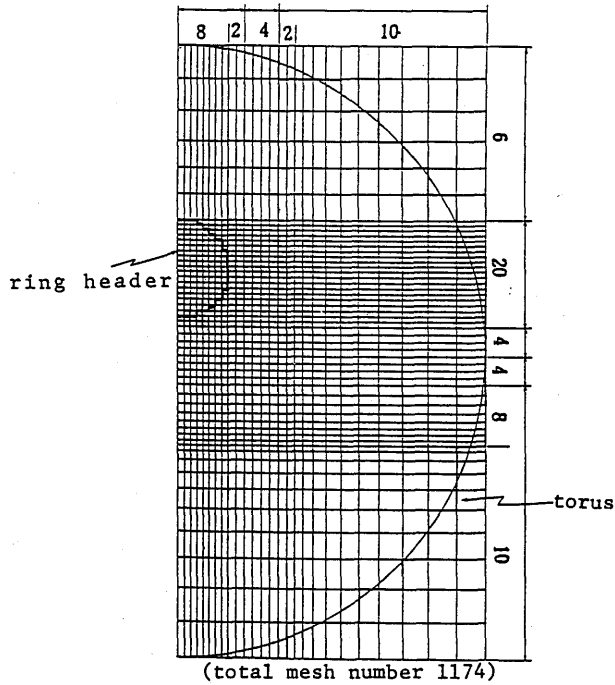


図4 メッシュセル形状

ーレンスリバモア研究所 (Lowrence Livermor Laboratory 以下 LLL と略称する) における実験<sup>(13)</sup>を選択した。この実験については既に筆者等による実験解析<sup>(14)</sup>があり、良好な結果を得ているがなお緒言で述べたような自由表面の取扱いについての問題が存在する。

プールの実験はトーラス状の圧力抑制系内の水中にパイプを用いて空気を吹込むことにより、水面の上昇と水中における気泡の発生を生じさせるものであり、水表面および気泡形状は図2に示すような挙動を示す。実験に用いられた装置の内トーラス断面の形状と大きさを図3に示す。なお実験の初期状態は常温 (20°C)、常圧 (1 気圧) であり、吹込まれる空気の量は約0.04秒間に1.5kg である。又数値解析を行うにあたり使用する  $x$ - $y$  平面における差分格子を図4に示す。

### 3. 2 熱力学的検討

(9)式により表面厚さ  $\delta$  内にとった表面半径により表面張力係数の大きさがいかに変化するかを評価する。この場合表面厚さ  $\delta$  の大きさが問題となるが、これに対する情報はほとんど無い。しかし参考文献(10)によると  $\delta \ll R_s$  であることが指摘されており、これを用いると  $\gamma \approx \gamma_s$  となる。すなわち表面張力係数を計算するための面を  $\delta$  内のどこにとっても  $\gamma$  の値はほとんど変わらず、 $\delta$  内の半径依存性は無視できる。

次に液滴の大きさ自体が異なった場合に表面張力係数  $\gamma$  に影響するかどうかを(10)式を用いて調べる。(10)式は表面張力係数を評価する位置として  $R_s$  を選んでいるが、これは上記の結果より表面張力を正しく評価する位置と考えて良い。(10)式において、問題になるのは  $\delta_\infty$  の値である。しかしこの値も現在のところどの物質に対しても明確に測定されていず不明であるが参考文献(10)によると  $\delta_\infty$  の値が問題となるのは  $R_s \approx 10^{-4}$ cm 程度の場合である。一方、(7)式より曲率半径  $R$  には数値計算上次のような最小値が存在する。

ただし(7)、(8)より  $|\frac{\Delta f}{\Delta x}| \leq 2 \frac{\Delta y}{\Delta x}$  であり、且  $\Delta x = \Delta y$  とすると、

$$R \geq \Delta x \sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2 / (4 \times \frac{\Delta y}{\Delta x})} = \frac{\sqrt{5}}{4} \Delta x \approx 0.5 \Delta x \quad (22)$$

となる。すなわち我々の用いる差分近似においては  $R$  の最小値が  $\Delta x$  のオーダーで抑えられる。本解析の場合  $\Delta x$  の最小値は約0.7cm であり  $10^{-4}$ cm に比較して極めて大きく、計算体系そのもの持つ分解能と比較した時、 $\gamma$  の持つ水滴半径依存性は無視できる。又一般の場合においても  $\Delta x$  は通常  $10^{-4}$ cm より大きいことから、 $\gamma$  の水滴の大きさ依存性は考慮しなくても良いであろう。ただし(22)式は正しい表面張力を求めるためには十分小さい空間分割巾を必要とすることを意味している点が重要である。

最後に、 $\gamma$  の温度依存性であるが、もし温度が293°K (20°C) から373°K (100°C) まで変化したとし、 $\gamma$  の変化を計算してみる。(11)より両温度における  $\gamma$  の値を  $\gamma_{20}$ 、 $\gamma_{100}$  と各々すると

$$\frac{\gamma_{100}}{\gamma_{20}} = \frac{\left(1 - \frac{373}{647.4}\right)^{11/9}}{\left(1 - \frac{293}{647.4}\right)^{11/9}} \approx 0.78$$

ただし  $T_c = 647.4^\circ\text{K}$  とした。この結果は、温度が  $80^\circ\text{C}$  上昇した場合、表面張力の値は 2 割ほど減少することを示している。

以上の結果、次のようなことがいえる。すなわち、表面張力係数  $\gamma$  を計算するに際し熱力学的影響は無視しうるほど小さい。ただし、温度依存性に関しては、温度の変化が大きい場合には考慮すべきであろう。

次節ではこれらの結果を踏まえ本解析における熱的な効果は一切無視し、2.3 節の式をそのまま用いることとする。

### 3.3 粘性ストレスの検討

プールの現象における表面張力  $\left(\frac{\gamma}{R}\right)$  の大きさを、 $t=0.2$  秒に例をとって図 5 に示す。気相部と気泡部の圧力差約 2 kPa に対し表面張力の大きさは大きくともその  $\frac{1}{10}$  程度である。このことは自由表面形状の安定化に対する表面張力の影響が微妙なものであることを示している。なお図

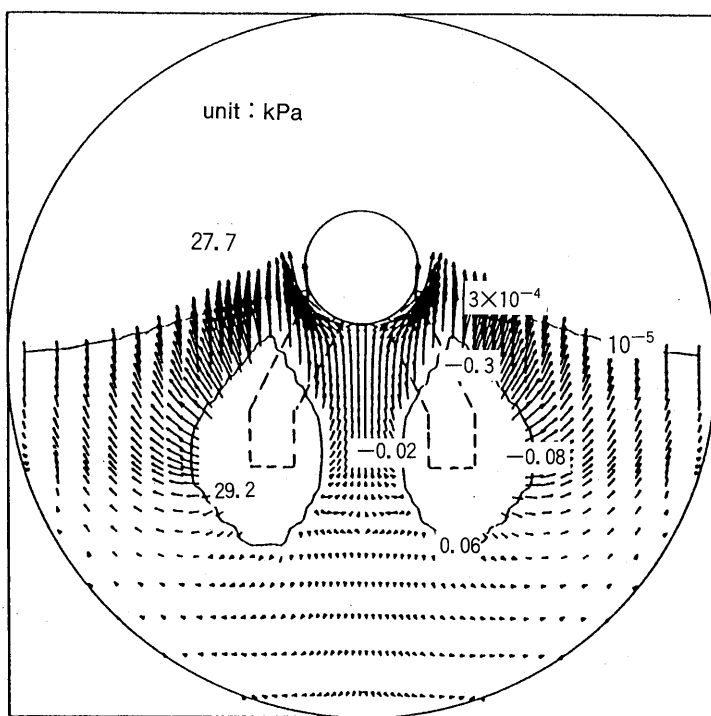


図 5  $t=0.2$  秒における表面張力の大きさおよび気相、気泡部圧力

非圧縮性流体の自由表面状態に関する数値解析的考察

中表面張力の符号に正負があるのは曲率半径  $R$  の符号に対応している。この計算において使用した水の表面張力係数  $\gamma$  の値は、 $7.2 \times 10^{-2}$  N/m である。

次に、粘性ストレスの効果を検討する。今乱流による効果を見捨てる、分子粘性による効果のみを考慮したとする。この時用いる水の分子粘性係数  $\eta_0$  は  $1.0 \times 10^{-3}$  m<sup>2</sup>/sec である。この場合(18式)の右辺第2項の値  $\eta_0 \left( \frac{\partial u_w}{\partial w} \right)_a$  の値は0.2秒付近で約  $10^{-2} \sim 10^{-4}$  kPa 程度となる。これは表面張力の  $10^{-1} \sim 10^{-2}$  倍程度でありその効果は小さく無視して良いであろう。

次に乱流による効果を検討する。図6は  $k-\epsilon$  モデルより得られた0.2秒における乱流粘性係数  $\eta_t$  の大きさを分子粘性係数  $\eta_0$  に対する倍率の形で示したものである。 $\eta_t$  の値は  $\eta_0$  の  $10^0 \sim 10^2$  倍の大きさを示している。このことは乱流粘性による  $\eta_t \left( \frac{\partial u}{\partial w} \right)_a$  の値は、表面張力  $\frac{\gamma}{R}$  の  $10^{-2} \sim 10$  倍程度になることを意味する。図6では、多くの場所で  $\eta_t \left( \frac{\partial u}{\partial w} \right)_a$  が  $\frac{\gamma}{R}$  の  $10^0 \sim 10$  となっている。すなわちプールのような激しい流動を伴う場合の自由表面解析において乱流ストレスの効果は、表面張力に対し同等以上の大きさを持ち無視出来ないことが判る。実際プール解析において、自由表面の条件として表面張力のみを考慮した場合ではすぐに不安定が生じ計算が破綻するが、乱流による粘性ストレスを考慮した場合には0.2秒程度まで安定な計算が可能であった(図6はその時の値である)。

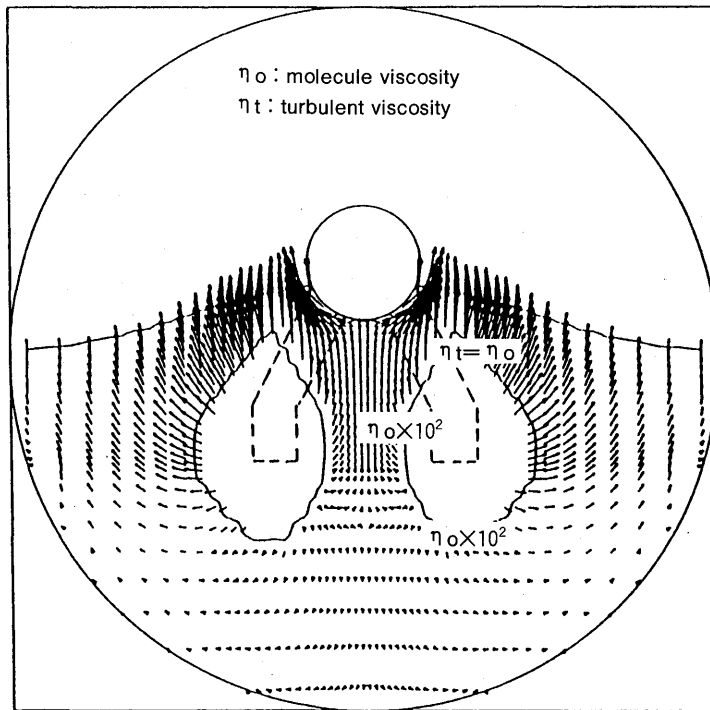


図6  $t=0.2$ 秒における乱流粘性係数  $\eta_t$  (分子粘性係数  $\eta_0$  との比較において)

以上より次のことが指摘される。緒言でも述べたように、自由表面を伴う激しい流動の解析において、その安定な解を得るためには理論値の数倍から数十倍と非現実的な表面張力を仮定しなければならなかった。しかし、本研究によれば、この非現実的な仮定の一部は自由表面付近における乱流粘性ストレスの効果に対応していると考えられる。ただし、本研究において用いた乱流モデルの自由表面付近への適応妥当性の検討および(22)式に示した差分近似の持つ限界を越える曲率半径の推定のしかた等が適切な自由表面状態の解析のため今後に残された問題である。

## 4. 結 論

本研究により次の結論を得た。

- 1) 激しい流れを伴う自由表面の安定な数値解を得るためには、従来表面張力の大きさとして理論値より大きい非現実的な値を仮定しなければならなかったが、本研究によれば、この非現実的な表面張力の少なくとも1部は自由表面付近の乱流粘性ストレスの効果に対応していると考えられる。又この乱流粘性効果が安定な解析に寄与することも確かめられた。従って自由表面の安定な数値解析には乱流による粘性ストレスの効果を自由表面の条件として正しく考慮せねばならず、それ故自由表面付近での乱流構造の研究も重要と思われる。
- 2) 表面張力に対する熱力学的効果は無視出来るほど小さい。ただし、表面張力係数の温度依存性は他の熱力学的効果より大きく、80°Cの温度上昇に対し2割程度その値が減少するそれ故正確な解析に対しては表面張力の温度依存性を考慮する方が望ましいと考えられる。
- 3) 数値解析上表面曲率半径の値には最小値が存在する。これが、表面張力の値に制限を与えており、安定で且正確な表面張力を得るためには十分小さい空間分割巾を必要とする。しかし、分割巾を大きくとらなければならない場合には、自由表面の曲率半径を計算値にもとづいて推定する別のモデルが必要とされるであろう。

### 参考文献

- (1) 村田健郎他「スーパーコンピューター」東京、丸善(1985)
- (2) 藪下 信『計算物理(I), (II)』東京、地人書館(1985)
- (3) 田中 實, 山本良一『計算物理学と計算化学』東京、海文堂(1988)
- (4) 矢嶋信男, 野木達夫『発展方程式の数値解析』東京、岩波書店(1977)
- (5) A. A. Amsden and F. H. Harlow, *SMAC Method-A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flow*, LA-4370 (1970)
- (6) A. A. Amsden et al. *SALE:A Simplified ALE Computer Program Fluid Flow at All Speed*, LA-8095 (1980)
- (7) C. W. Hirt et al., *SOLA-A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows*, LA-5852 (1975)
- (8) C. W. Hirt and B. D. Nichols, *Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries*, J. of Comp. Phys 39, pp. 201-225 (1981)
- (9) 標 宣男『圧力抑制グループLOCA時動荷重解析コード』JINS-0443 (1986)

非圧縮性流体の自由表面状態に関する数値解析的考察

- (10) 小野 周『表面張力』東京, 共立出版 (1988)
- (11) C. W. Hirt and J. P. Shannon, *Free-Surface Stress Condition for Incompressible-Flow Calculations*, J. of Comp. Phys. 2, pp. 403-411 (1968)
- (12) ランダウ=リフシッツ著, 竹内均訳『流体力学現代理論物理学教程』, 東京, 東京図書 (1972)
- (13) E. W. McCauley, et al., *Final Air Test Results for the 1/5 Scale Mark-I Boiling Reactor Pressure Suppression Experiment*, UCRL-52371 (1977)
- (14) N. Shimegi and K. Suzuki, *Analyses of Pool Swell Test by Two-Dimensional Hydrodynamic Computer Code*, JNST Vol. 25, No. 10 (1988)